Apellido y nombres: ....

Padrón: .... Correo electrónico: ....

Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Primera fecha. 3 de julio de 2018.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y simplemente conexo y $\Gamma \subset A$ curva diferenciable a trozos, simple y cerrada. Dados $z_1, z_2 \in A$ y $f : A \to \mathbb{C}$ holomorfa, decir bajo qué condiciones la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz$$

está bien definida. Calcular todos sus posibles valores según se varíe la curva Γ.

(b) Estudiar la convergencia de la siguiente integral y de acuerdo a lo hallado, calcular el valor de ésta utilizando residuos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1+x^2)}\, dx$$

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Encontrar la mejor aproximación de la forma $a + b\cos x + c \operatorname{sen} x$ en el sentido de la media cuadrática en el intervalo $[-\pi, \pi]$ a la función f y decir por qué es la mejor.

(b) Verificar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$ converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de la serie fuera de este intervalo?

Ejercicio 3.

(a) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Calcular la transformada de Fourier de $e^{-a|x|}$ y deducir la transformada de Fourier de $\frac{1}{x^2+a^2}$.

(b) Resolver la ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} u_x = u_t & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{x^2+1} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $H(t)$ la función de Heaviside.

(a) Resolver la siguiente ecuación integral utilizando la transformada de Laplace:

$$\phi(t) + \int_0^t (t-x)\phi(x)dx = H(t)$$

(b) Probar que $\mathcal{L}\left[f(ax-b)H(ax-b)\right](s) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \mathcal{L}[f](s/a)$ siendo $a > 0$, $b \geqslant 0$.